Projet de Compressed Sensing

Relaxations SDP pour l'optimisation en nombres entiers

Rémy Deshayes et Éric Lavergne

ENSAE
IP Paris

Lundi 29 mars 2021

Introduction : Problèmes étudiés

- Problèmes d'**optimisation en nombre entiers**
- Souvent présentés sous la forme de problèmes d'**optimisation combinatoire**

Optimisation combinatoire

Soit c le vecteur des coûts c_e associés à chaque élément e d'un ensemble fini E,
Soit $\mathscr{F}$ un ensemble fini de combinaisons d'éléments de E

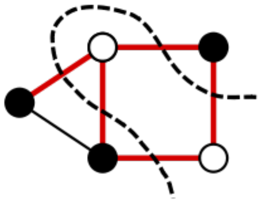
$$z^* = \min\{c(F) := \sum_{e \in F} c_e : F \in \mathscr{F}\} \tag{COP}$$

- Application en pratique au **Max-cut** (étudié dans cette présentation) et au Graph Coloring

Introduction : Le problème du Max-cut

- Trouver la séparation des sommets d'un graphe qui **coupe le plus d'arêtes** / de poids associés aux arêtes
-
$$z_{mc} = \max_{S \subseteq V} \sum_{ij \in \delta(S)} a_{ij} \qquad \text{(MC)}$$

  Où $(a_{ij})_{i,j}$ est la matrice d'adjacence du graphe, V l'ensemble de ses sommets et $\delta(S)$ les arêtes reliant S à $V \setminus S$



Sommaire

Relaxation SDP (1/3) : Idée générale

De l'approche polyhédrale...

Pour tout $F \in \mathscr{F}$, $x_F \in \{0,1\}^n$ où $(x_F)_e = 1$ quand $e \in F$.
On réécrit alors (COP) comme le **programme linéaire** suivant :

$$z^* = \min\{c^T x_F : F \in \mathscr{F}\} = \min\{c^T x : x \in P := \mathrm{conv}\{x_F : F \in \mathscr{F}\}\}$$

...au *Matrix Lifting*

On introduit :

$$\mathscr{M} := \mathrm{conv}\{x_F x_F^T : F \in \mathscr{F}\}$$

- Passer à l'**espace des matrices SDP** en utilisant $\mathscr{M}$ à la place de P
- Permet de transformer les contraintes quadratiques sur $x \in P$ en contraintes linéaires sur $X \in \mathscr{M}$

Relaxation SDP (2/3) : Optimisation SDP

Formulation du problème d'optimisation convexe SDP

$$z_p = \inf\{\langle C, X\rangle : \langle A_i, X\rangle = b_i, i = 1, \ldots, m, X \succeq 0\} \tag{SDP}$$

où $C, A_1, \ldots, A_m$ sont symétriques de taille n et $b \in \mathbb{R}^m$

Relaxation SDP (3/3) : Application au Max-cut

On introduit :

- les **vecteurs caractéristiques** : $x \in \{-1, 1\}^n$ où $x_i = 1$ si $i \in S$
- Le **Laplacien de la matrice** A : $L_A = \mathrm{Diag}(Ae) - A$
  où $e = (1, \ldots, 1)^T$

On a ainsi :

$$\sum_{ij \in \delta(S)} a_{ij} = \sum_{ij \in E} a_{ij} \frac{1 - x_i x_j}{2} = \frac{1}{4} x^T L_A x$$

$$z_{mc} = \max_{x \in \{-1,1\}^n} \frac{1}{4} x^T L x$$

Relaxation SDP (3/3) : Application au Max-cut

Puis en introduisant $X = xx^T$ et en relâchant des hypothèses :

Relaxation SDP du problème du Max-Cut

$$z_{mc,sdp} = \max \frac{1}{4}\langle L, X\rangle$$

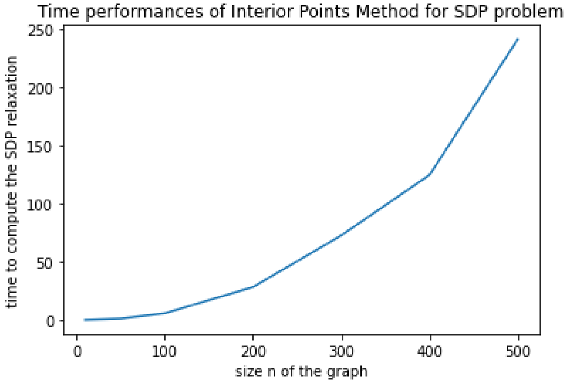
$$\text{s.c : } \operatorname{Diag}(X) = e$$

$$X \succeq 0$$

Méthodes de résolution (1/2) : Points intérieurs

- On exploite ici la méthode itérative de Newton
- On ajoute une **fonction barrière** (par exemple logarithmique) pour garantir que les itérations restent dans l'espace des points faisables (sur le **chemin primal-dual**)
- Cette fonction barrière est contrôlée par un **paramètre** μ **que l'on fait décroître** peu à peu pour aboutir à une solution du problème original

Méthodes de résolution (1/2) : Points intérieurs



Méthodes de résolution (2/2): Lagrangien partiel

- Méthode du Lagrangien partiel : efficace pour un **nombre de contraintes particulièrement grand** :

$$\inf\{\langle C, X\rangle : A(X) = a, B(X) = b, X \succeq 0\} \text{ où B impraticable}$$

- Une partie des contraintes est conservée telle que le problème soit résoluble raisonnablement :

$$\mathscr{X} = \{X : A(X) = a, X \succeq 0\}$$

- L'autre partie des contraintes est prise en compte en maximisant la **fonction duale de Lagrange partielle** :

$$\max_{y} \min_{X \in \mathscr{X}} L(X, y) \text{ où } L(X, y) = \langle C, X\rangle + y^T(b - B(X))$$

Hyperplane Rounding (1/2) : Idée générale

- Obtenir à partir d'une solution X dans $\mathscr{M}$ de la relaxation SDP **une solution (approximée) dans l'espace initial**
- Procédure de l'hyperplane rounding d'abord présentée par Goemans et Williamson pour le Max-Cut
- Procédure **aléatoire** avec de bonnes garanties probabilistes
- Représenter les éléments de E par les colonnes de la matrice V tel que $X = V^T V$
- Tirer aléatoirement **un ou des hyperplans** pour définir les combinaisons à utiliser comme les éléments se trouvant dans une même région délimitée par les hyperplans

Hyperplane Rounding (2/2): Application au Max-Cut

Hyperplane rounding appliqué au Max-Cut (GW95)

- Obtenir X une solution de la relaxation SDP du Max-Cut, et V vérifiant $X = V^T V$
- Associer chaque colonne V_i au sommet i du graphe
- Tirer aléatoirement un vecteur r sur la sphère unité de façon à obtenir un **hyperplan séparant les V_i en deux ensembles**
- Retourner les deux ensembles de sommets

Cette partition fournit **une bonne approximation en espérance** ; on fait plusieurs tirages pour obtenir une partition satisfaisante.

$$\mathbb{E}[GW95] > 0.87856 z^*_{sdp} > 0.87856 z^*_{mc}$$

Conclusion